1$^{\text{ères}}$ Maths DS n°3 **samedi 15 Mars 2025** **Durée 1h30**

Calculatrice autorisée en **mode examen** **Total sur 20 points**

Exercice 1 [7 points]

On considère la suite de premier terme $u_0 = 2$ telle que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

1. Le programme Python suivant demande à l'utilisateur de choisir un entier naturel n puis affiche la valeur de u_n :

```
01 U=2
02 n=int(input("n="))
03 for k in range( ...
04      U= ...
05 print(U)
```

Recopier sur la copie les lignes 03 et 04 exactement comme elles doivent être tapées.

2. Calculer u_1 et u_2. En déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

3. Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a. Déterminer v_0.

b. Démontrer que (v_n) est arithmétique et en préciser la raison.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

4. Exprimer u_n en fonction de n.

5. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-4}{(2n+1)(2n+3)}$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 2 [6 points]

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x+7}{x^2+2x+2}$$

Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f.

2. On considère le suite (u_n) telle que pout tout n entier naturel :

$$u_n = \frac{3n+7}{n^2+2n+2}$$

a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $u_n \leqslant 0{,}1$.

<u>Exercice 3</u> [7 points]

L'entreprise LOCAT'CAR propose un système de locations de ses voitures selon les modalités suivantes :

• chaque voiture est louée pour une durée d'un mois
• la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois
• le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées à des particuliers avec ce système de location.

Le directeur de LOCAT'CAR constate que, d'un mois sur l'autre 10% des particuliers ayant loué une voiture ne renouvellent pas leur contrat et 42 nouveaux particuliers signent un contrat de location.

Pour tout entier naturel n on note u_n le nombre de voitures louées par cette entreprise le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $u_0 = 280$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 42$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 420$.
   a. Déterminer v_0.
   b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
   c. Exprimer v_n en fonction de n.
   d. En déduire que, pour tout entier naturel n on a : $u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420$.

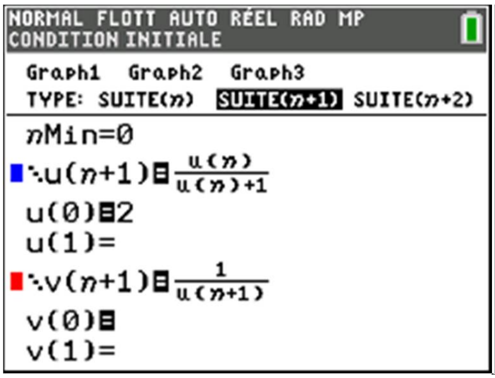
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

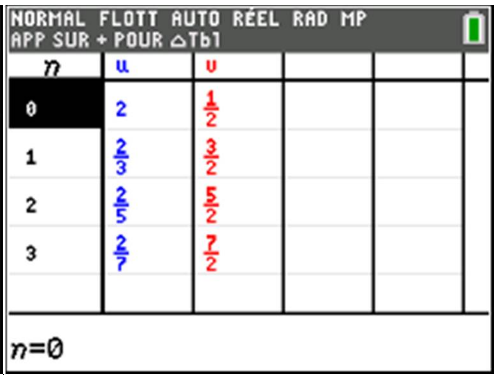
4. L'entreprise LOCAT'CAR possède initialement 380 véhicules et son directeur envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande.
À l'aide de la calculatrice déterminer à partir de quelle date le nombre de voitures deviendra insuffisant.

Corrigé thiaude

Exercice 1

$$u_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$





1. (programme Python, lignes à compléter)

   03 for k in range(0,n) :

   04 U= U/(U+1)

2. **Calculer u_1 et u_2. En déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.**

   $$u_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

   • pour $n = 0$, on obtient : $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0 + 1} = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

   • pour $n = 1$, on obtient : $u_2 = \dfrac{u_1}{u_1 + 1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{3}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{2 \times 3}{3 \times 5} = \dfrac{2}{5}$

   Résumons : $\boldsymbol{u_1 = \frac{2}{3}}$ et $\boldsymbol{u_2 = \frac{2}{5}}$.

   On a d'une part :

   $$u_1 - u_0 = \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{6} - \frac{6}{3} = -\frac{4}{3} \quad et \quad u_2 - u_1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{6}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{4}{15}$$

   On constate que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **n'est pas arithmétique**.

   D'autre part, on a :

   $$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{3} \quad et \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{5 \times 2} = \frac{3}{5}$$

   On constate que $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **n'est pas géométrique**.

3. Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

   a. **Déterminer $\boldsymbol{v_0}$.**

   Pour $n = 0$, on obtient : $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{2}$

   Résumons : $\boldsymbol{v_0 = \frac{1}{2}}$.

b. Démontrer que (v_n) est arithmétique et en préciser la raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_n + 1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n} = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = 1$ et 1 est une constante donc (v_n) est arithmétique de raison 1.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La suite (v_n) est arithmétique donc en notant r sa raison on a : $v_n = v_0 + nr$.

Or, $v_0 = \frac{1}{2}$ et $r = 1$ donc : $v_n = \frac{1}{2} + n$.

Conclusion : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2} + n}$.

4. Exprimer u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \frac{1}{u_n}$ donc $u_n = \frac{1}{v_n}$, or $v_n = \frac{1}{2} + n$ donc :

$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + n} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2n}{2}} = \frac{1}{\frac{1 + 2n}{2}} = \frac{2}{2n + 1}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n + 1}}$.

5. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = \frac{-4}{(2n + 1)(2n + 3)}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{2(n + 1) + 1} - \frac{2}{2n + 1} = \frac{2}{2n + 3} - \frac{2}{2n + 1} \\ &= \frac{2(2n + 1)}{(2n + 3)(2n + 1)} - \frac{2(2n + 3)}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{2(2n + 1) - 2(2n + 3)}{(2n + 1)(2n + 3)} \\ &= \frac{4n + 2 - 4n - 6}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{-4}{(2n + 1)(2n + 3)} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{-4}{(2n + 1)(2n + 3)}}$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $n \geqslant 0$, $2n \geqslant 0$, $2n + 1 > 0$ et $2n + 3 > 0$ donc $(2n + 1)(2n + 3) > 0$

Comme $-4 < 0$ on en déduit : $\frac{-4}{(2n+1)(2n+3)} < 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ donc **(u_n) est (strictement) décroissante**.

Exercice 2

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+7}{x^2+2x+2}$$

Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f.

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u(x) = 3x + 7$ $\qquad$ $u'(x) = 3$

$v(x) = x^2 + 2x + 2$ $\qquad$ $v'(x) = 2x + 2$

$$f'(x) = \frac{3(x^2+2x+2) - (2x+2)(3x+7)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2+6x+6-(6x^2+14x+6x+14)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2+6x+6-6x^2-14x-6x-14}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2-14x-8}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-3x^2-14x-8}{(x^2+2x+2)^2}}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $-3x^2-14x-8$;

$-3x^2-14x-8$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-3$, $b=-14$ et $c=-8$,

de discriminant : $\Delta = b^2-4ac = (-14)^2 - 4(-3)(-8) = 196 - 96 = 100$.

$\Delta > 0$ donc $-3x^2-14x-8$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+14-\sqrt{100}}{2(-3)} = \frac{14-10}{-6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+14+\sqrt{100}}{2(-3)} = \frac{14+10}{-6} = -\frac{24}{6} = -4$$

Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à m'extérieur de ses racines ».

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

x	$-\infty$		-4		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Sens de variation de f		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	

$$f(-4) = \frac{3(-4)+7}{(-4)^2+2(-4)+2} = -\frac{1}{2} \text{ et } f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3\left(-\frac{2}{3}\right)+7}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+2\left(-\frac{2}{3}\right)+2} = \frac{9}{2}$$

2. On considère le suite (u_n) telle que pout tout n entier naturel :

$$u_n = \frac{3n+7}{n^2+2n+2}$$

a. Déterminer le sens de variation de la suite $(\boldsymbol{u_n})$.

Le tableau de variation de f montre qu'elle est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ donc qu'elle inverse le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant n < n+1$ donc : $f(n) > f(n+1)$, autrement dit : $u_n > u_{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **est (strictement) décroissante**.

b. Justifier que, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_n > 0}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \geqslant 0$ donc $3n \geqslant 0$ puis $3n+7 > 0$, $n^2 \geqslant 0$, $2n \geqslant 0$ donc $n^2+2n+2 > 0$, par conséquent : $\frac{3n+7}{n^2+2n+2} > 0$, autrement dit $u_n > 0$.

<u>Conclusion</u> : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n > 0}$.

c. Déterminer le plus petit entier naturel $\boldsymbol{n}$ tel que : $\boldsymbol{u_n \leqslant 0,1}$.

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$$\frac{3n+7}{n^2+2n+2} \leqslant 0{,}1$$

qui s'écrit aussi : $3n+7 \leqslant 0{,}1(n^2+2n+2)$ ou encore :

$$-0{,}1n^2+2{,}8n+6{,}8 \leqslant 0$$

L'étude du signe de $-0{,}1n^2+2{,}8n+6{,}8$ sur $\mathbb{N}$ donne : $n \geqslant 2\sqrt{66}+14$.

Comme $2\sqrt{66}+14 \approx 30{,}25$ on obtient $n \geqslant 31$.

Le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 0{,}1$ est donc : $\mathbf{31}$.

À l'aide de la calculatrice : $u_{30} \approx 0{,}1008 > 0{,}1$ et $u_{31} \approx 0{,}0976 \leqslant 0{,}1$.
Comme (u_n) est trictement décroissante : si $0 \leqslant n \leqslant u_{30}$, $u_n \geqslant u_{30} > 0{,}1$ et on a vu que $u_{31} \leqslant 0{,}1$ donc le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 0{,}1$ est bien $\mathbf{31}$.

<u>Exercice 3</u> [7 points]

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois

À la fin du mois de janvier 2019 :280 voitures ont été louées.
D'un mois sur l'autre 10% des particuliers ayant loué une voiture ne renouvellent pas leur contrat et 42 nouveaux particuliers signent un contrat de location.
Pour tout entier naturel n on note u_n le nombre de voitures louées par cette entreprise le n-ième mois après le mois de janvier 2019, $u_0 = 280$.

1. **Justifier que, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = 0,9\, u_n + 42}$.**

On se place au bout de n mois : il y a u_n voiture louées.
Le mois suivant il y aura u_{n+1} voitures louées, or avec les indications de l'énoncé il y aura un nombre de voitures louées égal à : $u_n - 10\%\ de\ u_n + 42 = 0{,}9u_n + 42$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1} = 0,9\, u_n + 42}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 420$.

a. Déterminer v_0.

$v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140$

$\boldsymbol{v_0 = -140}$

b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 420 = 0{,}9u_n + 42 - 420 = 0{,}9u_n - 378 = 0{,}9\left(u_n - \frac{378}{0{,}9}\right)$$
$$= 0{,}9(u_n - 420) = 0{,}9v_n$$

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}9v_n$ et 0,9 est une constante donc $(\boldsymbol{v_n})$ **est géométrique de raison $\mathbf{0,9}$**.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La suite (v_n) est géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n$, or $v_0 = -140$ et $q = 0{,}9$ donc :

$$v_n = -140 \times 0{,}9^n$$

Conclusion :

$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -140 \times 0{,}9^n}$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n on a : $\boldsymbol{u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = u_n - 420$, donc : $u_n = v_n + 420$, or : $v_n = -140 \times 0{,}9^n$ donc :$u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420$.

Conclusion :

$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420}$.

3. Déterminer le sens de variation de la suite $(\boldsymbol{u_n})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = -140 \times 0{,}9^{n+1} + 420 - (-140 \times 0{,}9^n + 420)$$
$$= -140 \times 0{,}9^n \times 0{,}9 + 140 \times 0{,}9^n = 140 \times 0{,}9^n(-0{,}9 + 1) = 14 \times 0{,}9^n$$

Or : $0{,}9 > 0$ donc $0{,}9^n > 0$ et comme $14 > 0$ on en déduit $14 \times 0{,}9^n > 0$,

c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n > 0$.

Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc **la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est (strictement) croissante**.

4. L'entreprise LOCAT'CAR possède initialement 380 véhicules et son directeur envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande.
À l'aide de la calculatrice déterminer à partir de quelle date le nombre de voitures deviendra insuffisant.

Il s'agit d'abord de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 380$.

Or, à l'aide de la calculatrice, on obtient : $u_{11} \approx 376 \leqslant 380$ et $u_{12} \approx 380{,}46 > 380$ donc ce plus petit entier naturel n est : 12.

Or, le relevé de fin janvier 2019 correspond à $n = 0$ donc $n = 12$ correspond au relevé de fin janvier 2020.

C'est à partir de fin janvier $\mathbf{2020}$ que le nombre de voiture dont dispose LOCAT'CAR deviendra insuffisant.